

## Dreiecke mit negativen Seiten?

von Otto Weitbrecht, Ulm

Die einfach scheinende Aufgabe, ein Dreieck aus  $b$ ,  $c$ ,  $\varrho$  euklidisch zu konstruieren, erweist sich im allgemeinen als unlösbar. Versucht man, die dritte Seite  $a$  unter Benutzung des Flächeninhalts (nach Hero)

$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = W$  (Wurzel) als Funktion der gegebenen Stücke darzustellen, so erhält man, nach Potenzen von  $a$  geordnet, die *Ausgangsgleichung* (dritten Grads)

$$a^3 - a^2(b+c) - a((b-c)^2 - 4\varrho^2) + (b+c)((b-c)^2 + 4\varrho^2) = 0.$$

Eine kurze Überlegung zeigt, daß bei verhältnismäßig kleinem  $\varrho$  und fest gehaltenem  $b$  und  $c$  ein spitzwinkliges *und* ein stumpfwinkliges Dreieck möglich ist (die spitzen und stumpfen Winkel sind jedoch keine Supplementwinkel), so daß die Gleichung 3. Grads zwei reelle Lösungen hat. Dann muß aber auch die dritte Lösung reell sein und zwar, wie aus Zeichenwechsel und -folge hervorgeht, negativ. Damit versteht man die Unlösbarkeit „mit Zirkel und Lineal“.

Zur näheren Untersuchung betrachtet man zunächst ein Dreieck, bei dem alle 4 Strecken ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\varrho$ ) bekannt sind, z. B. das pythagor. Dreieck mit  $a = 5$ ,  $b = 4$ ,  $c = 3$ ,  $\varrho = 1$ . Setzt man  $b$ ,  $c$ ,  $\varrho$  in die Ausgangsgleichung ein und dividiert durch  $(a-5)$ , so bleibt eine quadratische Gleichung zur Bestimmung der zwei andern Wurzeln. Man findet ganz elementar

$$a_2 = 1 + 2\sqrt{2} \quad \text{und} \quad a_3 = 1 - 2\sqrt{2}.$$

Es gibt also außer dem rechtwinkligen auch noch ein anderes Dreieck aus  $b = 4$ ,  $c = 3$ ,  $\varrho = 1$  mit spitzem Winkel.

$a_3$  ist negativ. Würde man ein Dreieck aus  $b$ ,  $c$  und dem absoluten Wert von  $a_3$  konstruieren, so hätte der Kreis mit  $\varrho$  darin keinen Platz, er würde „hinausgequetscht“. Sieht man die Dreiecksseiten als unendliche Geraden an, so wäre ja auch eine Berührung von außen möglich. Berechnet man nun für das Dreieck mit positivem  $a_3$  den Ankreishalbmesser  $\varrho_a$ , so findet man tatsächlich den Wert 1.

Untersucht man nun allgemein, wie sich rein formal die Ausdrücke für  $s = \frac{a+b+c}{2}$ ,  $s-a$ , ..., die  $\varrho$  und den Inhalt ändern, wenn man

einer (oder mehr) Seiten das negative Vorzeichen gibt, so muß beachtet werden, daß die Heronische Inhaltsformel ihrer Entstehung nach mit dem Vorzeichen  $\pm$  geschrieben werden muß, denn sie ist entstanden aus der 4-dimensionalen Gleichung für  $F^2$ , die unsere Raumvorstellung überschreitet, als Umkehrfunktion, zweideutig. Es wurden nämlich zwei Ausdrücke für  $F$ , etwa  $F = s \cdot \varrho$  und  $F = (s-a) \cdot \varrho_a$  multipliziert und dann auf Grund von ähnlichen Dreiecken das Produkt  $\varrho \cdot \varrho_a$  durch das Produkt  $(s-b)(s-c)$  ersetzt; die Wurzel hat daher zwei gleichberechtigte Vorzeichen. Damit entfällt auch die Diskrepanz mit der analytischen Geometrie, wo je nach dem Umlaufsinn der Flächeninhalt positiv bzw. negativ herauskommt, wobei noch daran erinnert werden soll, daß auch die Bezeichnung des Umlaufsinn als positiv oder negativ lediglich auf einer — natürlich zweckmäßigen — Convention beruht. Diese Zweideutigkeit erstreckt sich nun auf alle Größen, die aus der Heronischen Wurzel durch Division mit reellen rationalen Werten erhalten werden. Schreibt man z. B.  $F = \frac{bc \sin \alpha}{2}$ , wo  $b$  und  $c$  positiv sein sollen, für  $F$  aber das negative Vorzeichen gewählt wird, so muß  $\sin \alpha$  negativ sein und damit auch der Winkel  $\alpha$  selbst. Die Wurzel bleibt reell, solange  $|a| < |b| + |c|$  etc. ist.

Definiert man nun ein „Scheindreieck“, das aus dem wirklichen Dreieck mit den Seiten  $b$ ,  $c$ ,  $+a$  dadurch entsteht, daß man  $b$  und  $c$  über  $B$  und  $C$  hinaus verlängert, als Dreieck mit der negativen Seite  $a' = -a$  (und den Winkeln  $\beta' = 180^\circ - \beta$ ,  $\gamma' = 180^\circ - \gamma$ ,  $b' = +b$ ,  $c' = +c$ ), und berechnet man die entsprechenden Werte  $s' = \frac{a' + b' + c'}{2}$ ,  $s' - a'$ ,  $\varrho'$  und

so weiter, so bekommt man dieselben Ausdrücke wie beim normalen Dreieck mit den drei positiven Seiten, aber unter einander vertauscht und je nachdem mit verkehrtem Vorzeichen, z. B.  $\varrho' = -\varrho_a'$ , was mit dem obigen Spezialfall (mit  $\varrho = 1$ ) übereinstimmt, wobei man insbesondere der Fläche  $F' = \pm \sqrt{(s-a) \cdot s \cdot -(s-c) \cdot -(s-b)}$ , wie sie nach der Transformation aussieht, nunmehr das Vorzeichen „-“ gibt, das sowieso gleichberechtigt ist und was auch naheliegt, weil trotz des alten Werts des Radikanden der weiterhin so zu nennende „Inhalt“ nicht wohl direkt derselbe sein wird, wie vorher. Da auch bei 2 negativen Dreiecksseiten im Radikanden zwei negative Faktoren stehen, wird man auch hier der Wurzel das negative Vorzeichen geben, während man bei drei negativen Seiten, wo alle 4 Faktoren unter der Wurzel negativ sind, wieder das Vorzeichen  $+$  nehmen wird. Wenn man bei dem Dreieck mit *einer* negativen Seite konsequent mit dem negativen Wurzelvorzeichen weiterrechnet, so wird  $a' = -a$ , die von  $A$  ausgehenden Transversalen sind als positiv anzusehen (damit die geteilte Fläche nach der Formel  $\frac{bc \sin \alpha'}{2}$  negativ bleibt), die von  $B$  und  $C$  ausgehenden als negativ, und so

bleibt dem „Dreieck mit der negativen Seite  $a' = -a$ “ z. B. die Winkelsumme  $180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma + (-\alpha) = 180^\circ$ , alle Inhaltsformeln

$$F' = -W = \varrho' \cdot s' = \varrho'_a \cdot (s' - a') \dots = \frac{b' c' \sin \alpha'}{2} =$$

$$\frac{a' b \cdot \sin(180^\circ - \gamma)}{2} \text{ und so weiter, der Höhenseitensatz, der Seitensinussatz, der Cosinussatz, der Umkreishalbmesser } r' = \frac{-a}{2 \sin(-\alpha)} =$$

$$\frac{+b}{2 \sin(180^\circ - \beta)} = \dots \text{ widerspruchsfrei erhalten.}$$

Man kann sich von einem Dreieck mit einer negativen Seite eine gewisse Vorstellung (natürlich nur ein Bild) etwa folgendermaßen machen: Man legt auf einer Kugeloberfläche durch einen Punkt A zwei Großkreise, die einen spitzen Winkel  $\alpha$  bilden, auf dessen Schenkeln man  $AB = c$  und  $AC = b$  abträgt, und zieht durch B und C einen dritten Großkreis, dann entsteht ein normales sphärisches Dreieck mit den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ . Die zwei ersten Großkreise bilden ein Doppelzweiseit; dieses sieht man nun als eine einzige Fläche an, die an ihrer schmalsten Stelle, dem Gegenpol von A, nach Art eines Möbius'schen Bands verschränkt ist, so daß die zweite Hälfte die Innen- oder Unterseite eines Stücks der Kugeloberfläche zeigt und daher, wie man sich das auch in der analytischen Geometrie vorzustellen bzw. zu machen pflegt, als negativ anzusehen ist. Man betrachtet nun das Doppelzweiseit, von dem das Dreieck  $ABC = F$  abgeschnitten ist, selbst als „Dreieck mit der negativen Seite  $a' = -a$ “ und den Winkeln  $\beta' = 180^\circ - \beta$  und  $\gamma' = 180^\circ - \gamma$ , deren anfangs divergierende Schenkel später in A zusammentreffen und den Scheitelwinkel von  $\alpha$  bilden, der nunmehr, weil von unten (innen) gesehen, als negativ zu bezeichnen ist. Die Fläche dieses überschlagenen (Schein-) Dreiecks ist dann die algebraische Summe des negativen (Halb-) Zweiseits und dem Rest des positiven, von dem ja  $ABC$  abgeschnitten ist, also tatsächlich  $= -F$ . Ferner ist dann ohne weiteres zu sehen, daß der Inkreis des einen Dreiecks zugleich der Ankreis an das andere ist, und umgekehrt.

Es sollte gezeigt werden, daß zunächst unverständliche Wurzelwerte einer für eine algebraische Lösung aufgestellten Gleichung unter Umständen durch Definition von Dreiecken mit negativen Seiten einen geometrischen Sinn bekommen können.