Von den natürlichen Zahlen

(Vortrag vor dem Verein am 9. 12. 1960)

von Horst Brenzel, Ulm

Meine Damen und Herren!

In unserer Jugend haben sich geduldige Rechenmeister bemüht, uns den „richtigen Umgang mit Zahlen" beizubringen. Wir lernten das Rechnen mit ganzen Zahlen, Brüchen und Wurzeln; die Beschäftigung mit Logarithmen und trigonometrischen Funktionen gehörte eine Zeitlang zu unserem täglichen Brot.

Heute abend wollen wir vom Rechnen absehen und uns statt dessen mit dem Nachdenken über die Zahlen beschäftigen. Es gibt viele Zahlenarten, und wir greifen aus der großen Familie die ältesten und scheinbar harmlosesten Vertreter heraus: die natürlichen oder ganzen positiven Zahlen —, also die wohlvertraute Reihe, die mit eins beginnt und mit hundert oder hundert Millionen immer noch nicht zu Ende ist. Dank der erfolgreichen Tätigkeit jener Rechenmeister neigen wir dazu, die Problematik der natürlichen Zahlen zu verkennen, so daß es sich schon lohnt, wieder einmal eine „Stunde der Besinnung" einzulegen.

Natürliche Zahlen kann man addieren und multiplizieren, ohne daß einem etwas Besonderes auffällt. Dagegen stößt man schon beim Subtrahieren und Dividieren auf Schwierigkeiten: Wenn wir z. B. von der Zahl 5 die größere Zahl 7 abziehen wollen, müssen wir den Bereich der natürlichen Zahlen verlassen. Ähnlich steht es mit der Division: First wenn die Brüche — also eine viel kompliziertere Zahlenart — eingeführt sind, werden alle Divisionsaufgaben, die im Bereich der natürlichen Zahlen anfallen, zufriedenstellend lösbar. Die vier Grundrechnungsarten sind für natürliche Zahlen teilweise schon zu anspruchsvoll. In einem Bild ausgedrückt: Die Legislative der natürlichen Zahlen hat nicht vier, sondern nur zwei vollständige Gesetze erlassen: Addition und Multiplikation. Subtraktion und Division gehören dagegen übergeordneten Bereichen an; sie sind Fragmente, die zwar in den Bereich der natürlichen Zahlen hereinragen, ihn aber nicht beherrschen. Dadurch entstehen Spannungen ganz besonderer Art.

Unser Programm für heute abend umfaßt zwei Punkte: Die begrifflich saubere Erfassung der natürlichen Zahlen und einige Beispiele für die Schwierigkeiten, die infolge der eingeschränkten Gültigkeit der Division entstehen.

Zunächst geht es also um die Frage: „Was ist eine natürliche Zahl?"

Wir könnten annehmen, daß wir intuitiv schon wissen, was natürliche Zahlen sind. Sie würden dann als vorgegebene geistige Realitäten erscheinen, auf deren Eigenschaften wir keinerlei Einfluß nehmen können. Wir müßten sie nehmen, wie sie sind; natürliche Zahlen definieren hieße dann, unverkennbare und eindeutige Merkmale aufzuspüren, die zu ihrer Identifizierung brauchbar sind.

In der Mathematik sind solche Realdefinitionen, bei denen es um die begriffliche Erfassung eines Objekts durch Angabe von Gattung und artbildendem Unterschied geht, nicht sehr beliebt. Die Entwicklung der Mathematik hat gezeigt, daß mathematische Objekte zweckgerichtete Konstruktionen des menschlichen Verstandes sind, und dieser Erkenntnis paßt die Mathematik ihre Definitionsmethode an: Der Mensch ist der Schöpfer der Zahlen; wenn der einzelne nichts davon merkt, dann nur deshalb, weil er selbst an dieser Schöpfung unbeteiligt war und die Zahlen irgendwann — meist kritiklos und nur zum praktischen Gebrauch — übernommen hat. Von der Mathematik wird diese Schöpfung jedoch in Form einer Definition ausdrücklich nachvollzogen. Jeder Begriff erlangt hier erst durch die Definition wirkliche Daseinsberechtigung. Wir nennen diesen Schöpfungsvollzug axiomatische Begriffsbildung; in der Terminologie Kants handelt es sich um synthetische Definitionen, also um Begriffsbildungen frei nach unserem Willen. Mathematik ist daher eine Konstruktion des menschlichen Verstandes. Daß sie sich auf anderen Gebieten — z.B. den Naturwissenschaften — praktisch bewährt, ist fast nur ein erstaunlicher Zufall, eine merkwürdige Parallele zwischen menschlichem Verstand und Natur.

Unsere Frage lautet also besser: „Was wollen wir unter natürlichen Zahlen verstehen?" — Als Grundlage der folgenden Definition wählen wir das bekannte Peanosche Axiomensystem, weil es den Vorteil hat, nur ganz allgemeine und leicht formulierbare Überlegungen zu verwenden.

Als ersten Schritt wollen wir vereinbaren, unter dem Symbol „1" eine natürliche Zahl zu verstehen. (Bitte, vergessen Sie vorerst, daß Ihnen dieses Symbol hinreichend bekannt ist; wir könnten und dürften es jederzeit durch ein anderes ersetzen.) Da wir synthetisch definieren, ist die Existenz von natürlichen Zahlen keine Erfahrungstatsache; ihr Dasein beginnt erst mit dem Augenblick, wo wir von ihnen sprechen. Daher ist der Satz „1 ist eine natürliche Zahl" keine Selbstverständlichkeit, sondern Schöpfung und zugleich Geburtsurkunde wenigstens einer natürlichen Zahl.

Allerdings wäre es sinnlos, Symbol um Symbol einzuführen und kraft einer Vereinbarung natürliche Zahl zu nennen. Wir bekämen dann eine Reihe von Zeichen, die beziehungslos nebeneinander stehen. Vielmehr müssen wir schon jetzt bestrebt sein, weitere Zahlen mit schon vorhandenen unlösbar zu verknüpfen. Ein Stück dieses Zusammenhangs erreichen wir mit unserem zweiten Axiom: „Zu jeder natürlichen Zahl gibt es einen eindeutigen Nachfolger."

Das Nachfolger-Axiom bewirkt die unwiderrufliche Ordnung in der Aufeinanderfolge der natürlichen Zahlen, welche ein ganz typisches Merkmal dieser Zahlenart darstellt. Schon die gebrochenen Zahlen, die sonst nur wenig anspruchsvoller sind, besitzen nämlich keine Nachfolger, d. h. es ist unmöglich, einen Bruch anzugeben, der unmittelbar auf einen andern folgt. Gefühlsmäßig mag uns dieser Mangel der rationalen Zahlen überraschen, denn das Gefühl würde uns eher sagen, daß zu jedem Bruch ein nächstgrößerer existiert. Wie sehr man hier irren kann, zeigt folgende Probe: Nach 1,2 kommt irgendwann 1,3 — aber dazwischen liegt z. B. 1,25. Aber auch 1,25 ist kein Nachfolger von 1,2, weil dazwischen weitere Brüche vorhanden sind, von denen aus dem gleichen Grund ebenfalls keiner für sich beanspruchen kann, am allernächsten bei 1,2 zu liegen, d. h. Nachfolger zu sein. Wir sehen also: Im Sinne des „größer als" besitzt 1,2 keinen Nachfolger. Allerdings kann man die rationalen Zahlen zu einem wohlbestimmten Nebeneinander ordnen, weshalb sie mit den natürlichen Zahlen in einem bestimmten Sinne doch vergleichbar werden.

Oft ist es zweckmäßig, die Nachfolger nicht durch eigene Symbole (2, 3, 4, . . .), sondern durch angehängte Striche zu kennzeichnen. Der Anfang der Zahlenreihe sieht dann so aus:

1 — 1' — 1'' — 1''' — ...

Der Nachfolger der beliebigen Zahl n wird entsprechend mit n' bezeichnet.

Mit Hilfe dieser Schreibweise können wir das Nachfolger-Axiom symbolisch darstellen. Eindeutigkeit im Vorgänger-Nachfolger-Verhältnis bedeutet offenbar, daß gleiche Vorgänger stets gleiche Nachfolger haben. In Zeichen:

aus $m = n$ folgt $m' = n'$.

Negativ ausgedrückt: Wenn zwei Nachfolger verschieden sind, müssen sie auch zu verschiedenen Vorgängern gehören. Denn wären diese Vorgänger gleich, so hätten sie nach unserem zweiten Axiom auch gleiche Nachfolger. In dieser Form benötigt man das Nachfolger-Axiom bei Beweisen besonders häufig. Symbolisch dargestellt:

aus $m' \neq n'$ folgt $m \neq n$ ($\neq$ heißt „ungleich").

Das dritte Axiom befaßt sich mit der Sonderstellung der Zahl 1. Wir setzen nämlich fest, daß die Zahl 1 zwar Nachfolger haben, aber selbst nicht Nachfolger sein soll. Anschaulich ausgedrückt: Die Reihe der natürlichen Zahlen ist nach links begrenzt, sie beginnt mit 1. In der Symbolsprache: stets gilt $n' \neq 1$.

Dieses Axiom hat schwerwiegende Folgen: Zunächst ist erst jetzt gesichert, daß es außer 1 überhaupt weitere natürliche Zahlen gibt. Denn nach unseren bisherigen Überlegungen wäre es durchaus möglich, daß die Reihe der natürlichen Zahlen folgendermaßen aussieht:

1 — 1 — 1 — 1 — . . .

Das dritte Axiom verbietet diese pathologische Reihe. Sie enthält nämlich 1 als Nachfolger, ist also nach unserer neuen Vereinbarung nicht zugelassen. Daher muß es außer 1 mindestens eine weitere natürliche Zahl geben. — Ferner ist das dritte Axiom schuld daran, daß man im Bereich der natürlichen Zahlen nicht uneingeschränkt subtrahieren kann. Weder die Null noch die negativen Zahlen werden vorerst in den Kreis des Rechnens einbezogen.

Diese Beschränkung hat historische und praktische Gründe: Es hat erstaunlich lange gedauert, bis der Mensch das Rechnen mit negativen Zahlen und insbesondere der Null sicher beherrschte. Im Abendland wurde die Null — deren Entdeckung wahrscheinlich auf die Inder zurückgeht — erst im zwölften Jahrhundert bekannt. Diesem geschichtlichen Tatbestand tragen wir heute noch Rechnung, wenn wir zwischen natürlichen Zahlen und ganzen Zahlen beiderlei Vorzeichens einschließlich der Null unterscheiden. Ferner — und das sind die praktischen Gründe unserer Beschränkung — wird die Herleitung der Rechengesetze übersichtlicher, wenn negative Zahlen vorerst ausgeschlossen bleiben. Ihre Einführung wird später nachgeholt, indem man den Geltungsbereich der Subtraktionseigenschaften axiomatisch erweitert, wobei die Sonderstellung der Null besonders klar in Erscheinung tritt. —

Das vierte Postulat verschärft die Ordnung des Vorgänger-Nachfolger-Verhältnisses, knüpft also beim zweiten Axiom wieder an. Dort legten wir fest, daß jede natürliche Zahl nur einen einzigen Nachfolger haben soll. Wie das folgende Beispiel zeigt, kann dadurch nicht verhindert werden, daß die Reihe der natürlichen Zahlen entartet. Noch ist es möglich, daß die Reihe auf der Stelle tritt —, daß also die Zahlen irgendwo aufhören, voneinander verschieden zu sein. Es entsteht eine Reihe, bei der an späterer Stelle das eintritt, was vor dem dritten Axiom schon von 1 an eintreten konnte:

1 — 2 — 3-— 4 — 5 — 5 — 5 — 5 — ...

Von der Zahl 5 an sind hier alle Nachfolger gleich. Dennoch gelten die bisherigen Axiome: Jede Zahl hat ihren eindeutigen Nachfolger, 1 tritt nirgends als Nachfolger auf. Greifen wir zwei v e r s c h i e d e n e Zahlen aus der Reihe heraus, so haben sie ersichtlich auch v e r s c h i e d e n e Vorgänger.

Unerfreulicherweise ist es aber möglich, daß zu *gleichen* Nachfolgern *verschiedene* Vorgänger gehören: Zur ersten 5 gehört der Vorgänger 4, zur zweiten 5 der Vorgänger 5. Also gleiche Nachfolger mit verschiedenen Vorgängern! Die Eindeutigkeit im Nacheinander der Zahlen gilt offenbar erst in einer Richtung.

Der Eindeutigkeitsbegriff besitzt diese einseitige Orientierung grundsätzlich, sie gehört zu seiner logischen Struktur. Ein unmathematisches Beispiel: „Alle Europäer sind Menschen“ (eindeutige Zuordnung Europäer —> Mensch). Die umgekehrte Zuordnung „Alle Menschen sind Europäer“ ist nicht nur sachlich, sondern schon logisch falsch. Auf unsere Zahlen angewendet heißt das: Wenn man — wie im zweiten Axiom — festlegt, daß zu gleichen Vorgängern gleiche Nachfolger gehören sollen, ist damit nicht von selbst gesagt, daß dann auch zu gleichen Nachfolgern gleiche Vorgänger gehören. Wenn diese Umkehrung tatsächlich gelten soll, muß sie in einem weiteren Axiom erst gefordert werden. Wir setzen daher fest: „Sind zwei Zahlen gleich, so haben sie (außer gleichen Nachfolgern) auch gleiche Vorgänger.“ In Zeichen:

aus $m' = n'$ folgt $m = n$.

Zweites und viertes Axiom zusammen gewährleisten — mathematisch ausgedrückt — die Eineindeutigkeit der Nachfolgerschaft, d. h. die Eindeutigkeit in beiden Richtungen. Damit ist es ausgeschlossen, daß die Reihe der natürlichen Zahlen auf der Stelle tritt. Positiv ausgedrückt: Es gibt unendlich viele verschiedene natürliche Zahlen und jede Zahl tritt in der Reihe genau einmal auf. Die Zahlenreihe hat einen Anfang, aber kein Ende.

Wir kommen jetzt zum letzten Axiom. Wenn wir nach einem bestimmten Verfahren einzelne Zahlen herausgreifen, so hängt es offensichtlich ganz vom Auswahlprinzip ab, welche und wie viele Zahlen wir erfassen. Wenn wir z. B. jede Zahl aussondern, die durch 2 teilbar ist, so erhalten wir die Menge der geraden Zahlen. Suchen wir dagegen alle Zahlen heraus, die nur durch 1 oder sich selbst teilbar sind, so erfassen wir die Menge der Primzahlen. In jedem Fall erfolgt die Auswahl nach einem wohldefinierten Prinzip —, und welche Zahlen erfaßt werden, hängt nur von dieser Vorschrift ab.

Sicherlich gibt es auch Auswahlverfahren, die auf Grund ihrer besonderen Verfassung ganz von selbst *alle* Zahlen aufgreifen. Um ein solch umfassendes Verfahren scheint es sich immer dann zu handeln, wenn mit jeder Zahl auch ihr Nachfolger ausgewählt wird. Wenn ein solches Verfahren mit 1 beginnt, können wir uns nicht vorstellen, daß irgendwelche Zahlen übrig bleiben. Denn alle Zahlen auswählen scheint doch gerade zu bedeuten, mit jeder Zahl auch die folgende herauszugreifen und mit dieser Methode bei 1 zu beginnen.

Die Existenz von Verfahren, die schrittweise vorgehen und schließlich doch alle Zahlen erfassen, läßt sich logisch nicht begründen. Um zu beurteilen, ob ein Auswahl verfahren wirklich alle Zahlen aufgreift, müßten wir die Auswahl praktisch durchführen —, eine Aufgabe, die an der unendlichen Anzahl der natürlichen Zahlen scheitert.

Wir umgehen diese Schwierigkeit, indem wir für die Belange der natürlichen Zahlen den Begriff „alle“ neu definieren: „alle Zahlen“ soll diejenige Menge bedeuten, die erstens die Zahl 1 und zweitens mit jeder Zahl auch deren Nachfolger enthält. Dann erfaßt jedes Auswahlverfahren, das 1 und mit jeder Zahl auch ihren Nachfolger erfaßt, definitionsgemäß „alle“ natürlichen Zahlen. Die Existenz solcher Verfahren ist damit zu einer Eigenschaft der natürlichen Zahlen geworden. Der Unendlichkeitsbegriff mit seinen Tücken wird vermieden.

Bevor wir verschiedene Folgerungen aus den Axiomen betrachten, wollen wir sie noch einmal zusammenstellen:

1. 1 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl besitzt einen eindeutigen Nachfolger, d. h. es gilt: aus
   $m = n$ folgt $m' = n'$
   aus $m' \neq n'$ folgt $m \neq n$.
3. 1 hat keinen Vorgänger, ist also nie Nachfolger: $n' \neq 1$-
4. Gleiche Nachfolger lassen auf gleiche Vorgänger schließen: aus $m' = n'$ folgt $m = n$.
5. Eine Zahlenmenge enthält immer dann alle natürlichen Zahlen, wenn

a) 1 zur ausgewählten Menge,

b) mit jedem n auch n' zur Menge gehört.

Damit ist die Definitionsaufgabe gelöst. Die Peanoschen Axiome allein sagen uns, was eine natürliche Zahl ist. Sie ist das, was sie nach unserm Willen, der sich in der Auswahl dieser Axiome niederschlägt, sein soll. Alles, was wir über das „Wesen“ natürlicher Zahlen sonst sagen würden, wäre sinnlose Spekulation. Die Peanoschen Axiome sind eine begriffsbildende Formaldefinition, und man kann sich allenfalls darüber streiten, ob sie zweckmäßig und überhaupt erforderlich ist. Eine andere, ungelöste Schwierigkeit besteht in der Frage nach der Widerspruchsfreiheit dieser Axiome. Es kann nicht bewiesen werden, daß die einzelnen Postulate untereinander logisch verträglich sind. Das ist ein Nachteil der formalistischen Definitionsmethode, der nicht verschwiegen werden soll. Die Intuitionisten dagegen glauben an die Gottgegebenheit der natürlichen Zahlen und stehen vor der Frage, ob unsere Axiome auch als begriffsbeschreibende Realdefinitionen aufgefaßt werden können. Hier geht es dann um die Problematik der Vollständigkeit, denn es kann nicht bewiesen werden, ob alle Eigenschaften der als gegeben angenommenen Zahlen auch wirklich erfaßt werden. Ferner wäre die im fünften Axiom vorgenommene Neudefinition des Begriffes „alle“ nicht erlaubt, d. h. die erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten des Unendlichen treten bei der intuitionistischen Auffassung in aller Schärfe auf.

Wir haben uns bei dieser Darstellung für die formalistische Methode entschieden. Sie erspart uns die Diskussion des so verschwommenen Begriffs der „inneren Erfahrung“. Trotz der ungeklärten Frage der Widerspruchsfreiheit ist der formalistische Aufbau der Arithmetik klar und frei von begrifflichen Unsauberkeiten —, und das sind Eigenschaften, die jedes mathematische System auszeichnen sollten, wenn es nicht Gefahr laufen will, überhaupt nicht mehr als Mathematik anerkannt zu werden. Außerdem ist die formalistische Methode mühelos ausbaufähig: Mit Hilfe geeigneter Axiome können weitere mathematische Objekte konstruiert werden, sobald Bedarf vorhanden ist; der Mensch wird zum echten Schöpfer mathematischer Elemente, ohne dabei an etwas anderes außer seine Vernunft gebunden zu sein. Ein Musterbeispiel für diese Art produktiver Verstandestätigkeit ist die nichteuklidische Geometrie, die aus der gewöhnlichen Geometrie durch den Verzicht auf das Parallelenaxiom hervorgegangen ist. Gleichzeitig beweist dieses Beispiel, wie wenig es sich bei der Konstruktion mathematischer Objekte — auch wenn sie dem augenblicklichen Bedarf vorauseilt — um sinnlose Spielereien handelt: Die nachfolgende Entwicklung, d. h. der Fortschritt der Naturwissenschaften hat gezeigt, daß die Struktur des physikalischen Raumes nichteuklidisch und die nichteuklidische Geometrie daher von geradezu unheimlich praktischer Bedeutung ist. Dabei ist sie keineswegs der einzige Fall, wo der mathematische Formalismus der konkreten Anwendung vorausgeeilt ist. Ich erinnere an die Entdeckung der elektrischen Wellen durch Hertz, die erst erfolgte, nachdem diese Wellen von Maxwell auf Grund mathematischer Überlegungen und Theorien längst prophezeit worden waren.

Nicolai Hartmann drückt dieses fruchtbare Verhältnis zwischen mathematischem Formalismus und Naturwirklichkeit in seiner „Philosophie der Natur“ mit folgenden Worten aus:

> „Die Mathematik ist ein eminentes Erkenntnismittel, einzigartig an Genauigkeit und Tragkraft. Denn die Gesetzlichkeit der Mathematik ist uns a priori gegeben oder — soweit nicht gegeben — doch a priori auffindbar. Sie ist als solche durchaus keine Realgesetzlichkeit. Ihr ist es an sich äußerlich, daß sie die Naturprozesse beherrscht. Aber für die Naturprozesse ist das nicht äußerlich, sondern höchst charakteristisch. Und vollends ausschlaggebend ist es für die Naturerkenntnis. Nur so kann diese eine exakte sein. Denn nur die mathematischen Verhältnisse sind unserem Verstände a priori zugänglich (d.h. in sich selbst einsichtig).“

Doch wir wollen zu den natürlichen Zahlen zurückkehren! Bei der Aufzählung ihrer Axiome werden Sie vielleicht einige augenfällige Merkmale vermißt haben, die ebenso eindeutig wie die aufgezählten Axiome das Wesen der natürlichen Zahlen zu bestimmen scheinen, etwa die elementaren Regeln des Rechnens. Bei diesen Rechenregeln handelt es sich aber um sekundäre Merkmale der natürlichen Zahlen, d. h. um Eigenschaften, die aus den Axiomen abgeleitet werden können, sofern man sich nur vorher einigt, was man unter „rechnen“ verstehen will. Der Satz „zweimal zwei ist vier“ ist dann nicht mehr selbstverständlich — so etwas wie eine tausendfach erprobte Erfahrungstatsache —, sondern beweisbedürftige Behauptung, d. h. logische Folgerung aus den Axiomen. Die Rechenregeln bekommen bei der axiomatischen Grundlegung den Akzent absoluter Strenge. Ich möchte diesen Schritt von den Axiomen zum praktischen Rechnen nur andeuten; lückenlos durchgeführt ist er unendlich mühsam und zeitraubend.

Sobald die Axiome festliegen, werden — wie schon gesagt — die verschiedenen Rechenoperationen definiert. Multiplikation und Addition sind also — theoretisch — rein willkürliche Vereinbarungen, wo gesagt wird, nach welchem System zwei natürlichen Zahlen eine dritte zugeordnet werden soll. Z. B. versteht man unter der „Summe“ 2 plus 3 den dritten Nachfolger der Zahl 2; entsprechend also unter der Summe 3 plus 2 den zweiten Nachfolger der Zahl 3. Man kann jetzt beweisen, daß der dritte Nachfolger von 2 identisch ist mit dem zweiten Nachfolger von 3, daß also die Gleichung gilt:

$2 + 3 = 3 + 2.$

Die zu dieser Gleichung gehörige Fragestellung zeigt deutlich, daß auch banale Rechenregeln mathematische Probleme enthalten. Mit unserer Nachfolgersymbolik erhält die zu beweisende Behauptung folgendes Gesicht:

$2''' = 3''.$

Wir führen den Beweis indirekt:

Angenommen, die Gleichung wäre falsch, d. h. es wäre $2''' \neq 3''$; dann müßte nach dem zweiten Axiom, wonach ungleiche Nachfolger auch ungleiche Vorgänger haben, auch $2'' \wedge 3'$ sein, woraus nach dem gleichen Axiom folgen würde $2' \neq 3$, also etwas offensichtlich falsches, denn 3 ist doch gerade der Nachfolger von 2, d. h. 3 = *2!.* Also muß die Ausgangsgleichung, deren Negierung einen Widerspruch liefert, doch richtig sein, d. h. es gilt wie behauptet: $2 + 3 = 3 + 2$. — Führt man diesen Beweis allgemein, so erhält man das kommutative Gesetz der Addition: $a + b = b + a$.

Ähnlich werden auch die anderen, uns selbstverständlich gewordenen Spielregeln von Addition und Multiplikation streng bewiesen: nichts bleibt der Autorität der Rechenmeister überlassen. Hoffentlich sind sie den Mathematikern nicht böse wegen dieser Entzauberung ihrer Welt! —

Eine außerordentlich wichtige Rolle bei vielen Beweisen spielt das fünfte Axiom. Zwei einfache Beispiele sollen das erläutern:

Wir vergleichen die Potenzsummen ($2^n + 3^n$) mit den Potenzen 5^n, wobei n irgendeine natürliche Zahl bedeuten soll. Speziell für n = 1 ist die Summe (also $2^1 + 3^1$) gleich groß wie die Potenz 5^1. Für n = 2 ist die Summe sogar kleiner, denn $2^2 + 3^2$ ergibt nur 13, während die entsprechende Potenz 5^2 schon den Wert 25 liefert. Für noch größere Exponenten n scheint die Summe erst recht kleiner auszufallen wie die zugehörige Fünferpotenz. Wir vermuten also mit einigem Recht die Beziehung

$$2^n + 3^n \leq 5^n$$

für alle Exponenten n aus dem Bereich der natürlichen Zahlen. Der Beweis dafür wird folgendermaßen erbracht:

Die Beziehung $2^n + 3^n \leq 5^n$ bedeutet, solange nicht bewiesen ist, ob sie für alle Exponenten n gilt, ein Scheidewasser für die natürlichen Zahlen: Im „guten“ Lager denken wir uns alle Zahlen versammelt, für welche diese Beziehung erfüllt ist, im „schlechten“ Lager alle Exponenten, für welche die Beziehung nicht erfüllt ist. Durch Nachrechnen haben wir schon gefunden, daß die Exponenten 1 und 2 zum „guten“ Lager gehören.

Jetzt wollen wir einmal annehmen, k sei eine nicht näher bezeichnete Zahl aus dem „guten“ Lager; zu welchem Lager gehört dann ihr Nachfolger k'? Es ergibt sich folgendes:

$$2^{k'} + 3^{k'} = 2^{k+1} + 3^{k+1} = 2 \cdot 2^k + 3 \cdot 3^k < 5 \cdot 2^k + 5 \cdot 3^k = 5 \cdot (2^k + 3^k).$$

Weil k zu den Zahlen gehören soll, für welche die Bedingung $2^n + 3^n$ ^ 5^n erfüllt ist, ist der Ausdruck in der Klammer kleiner als die entsprechende Potenz 5^k. Daher gilt:

$$2^{k'} + 3^{k'} \leq \text{^ } 5 \cdot 5^k = 5^{k+1} = 5^{k'} \text{ oder } 2^{k'} + 3^{k'} \leq 5^{k'},$$

d. h. der Nachfolger k' gehört ebenfalls zum „guten“ Lager.

Wenn wir jetzt mit den Voraussetzungen des fünften Axioms vergleichen, so finden wir: Durch die Beziehung $2^n + 3^n \leq 5^n$ wird unter den natürlichen Zahlen eine Auswahl getroffen, welche alle Zahlen einseitig erfaßt und dem gleichen Lager zuordnet; denn weil die Zahlenmenge, für deren Elemente diese Beziehung gültig ist, die Zahl 1 enthält und mit jeder anderen Zahl k auch den Nachfolger k', enthält sie alle Zahlen, d. h. die Beziehung gilt allgemein.

Man nennt diese Beweismethode „vollständige Induktion“. Sie beruht auf dem fünften Axiom und wird daher immer dann verwendet, wenn entschieden werden soll, ob eine Behauptung, die für einige natürliche Zahlen gilt, eventuell für alle Zahlen richtig ist. Das trifft also immer dann zu, wenn die Behauptung für die Zahl 1 richtig ist und wenn außerdem aus der Richtigkeit für eine nicht näher bezeichnete Zahl die Richtigkeit für den Nachfolger erschlossen werden kann.

Ein mehr praktisches Beispiel zur vollständigen Induktion: Beim Fußballtoto soll der Ausgang einer gewissen Anzahl von Spielen vorausgesagt werden. Wieviel Voraussagemöglichkeiten gibt es für n Spiele?

Wird nur n = 1 Spiel ausgetragen, so gibt es offenbar drei Tipmöglichkeiten: 0 oder 1 oder 2. Anzahl: A, = 3^1. Bei n = 2 Spielen gibt es — wie man leicht kontrolliert — $A_1 = 3^2$ Möglichkeiten. Auf Grund dieses Anfangs vermutet man, daß es bei n Spielen 3^n Tipmöglichkeiten gibt: $A_n = 3^n$.

Die Formel stimmt für n = 1 (erste Voraussetzung der vollständigen Induktion). Jetzt sei k irgendeine Zahl, für welche die Formel richtig ist. Nehmen wir dann ein weiteres Spiel hinzu (Übergang von k zu k'), so kann man die schon vorhandenen Möglichkeiten mit drei weiteren für das hinzugefügte Spiel kombinieren. Wenn es also für k Spiele 3^k Tipmöglichkeiten gibt, so existieren für (k + 1) Spiele dreimal so viel, also dreimal 3^k oder — was dasselbe ist — 3^{k+1} Möglichkeiten. Damit ist gezeigt, daß die Formel immer dann für den Nachfolger eines Exponenten gilt, wenn sie für diesen Exponenten selbst richtig ist, d. h. auch die zweite Induktionsvoraussetzung ist erfüllt: Die Formel gilt für jede Anzahl von Spielen. — Für 13 vorauszusagende Spielausgänge ergeben sich 1 594 323 Tipmöglichkeiten. —

An diesen Beispielen können wir kaum erkennen, wie schwierige Probleme mit hülfe der vollständigen Induktion gemeistert werden. Dagegen sollten sie ausreichen, uns vor einer Verwechslung zu bewahren. Die empirischen Wissenschaften werden von einer namensähnlichen Erkenntnismethode beherrscht: der unvollständigen Induktion. Bei dieser unvollständigen Induktion schreibt man den ungeprüften Fällen Eigenschaften zu, die sich bei den geprüften Fällen ausnahmslos bewährt haben, vollzieht also den logisch anfechtbaren Schluß vom Besonderen auf das Allgemeine —, etwa in der Form: Jeder Körper fiel nach bisherigen Beobachtungen senkrecht nach unten, also werden Körper stets nach unten fallen. Es ist klar, daß in diesem Schluß keinerlei Logik steckt, sondern nur das Vertrauen auf das Gleichmaß der Natur.

Doch seien wir ehrlich: Wo es den empirischen Wissenschaften an der Strenge des Schließens fehlt, hapert es bei der Mathematik an den Prämissen. Die vollständige Induktion der Mathematik hat axiomatischen Charakter, und Axiome sind weitgehend willkürliche Setzungen, haben also mit Logik ebenfalls nichts zu tun. Sie sind der unbeweisbare Urbestandteil der

Mathematik, und wir können niemals erfahren, ob sie überhaupt Bezug zur Wirklichkeit haben. Sobald die Mathematik ihren vorgezeichneten Kreis verläßt —, sobald sie in den Bereich der Anwendungen fortschreitet, werden ihre Aussagen erkenntnistheoretisch fragwürdig. So wissen wir z. B. nicht, ob die mathematische Weiterverarbeitung von Erfahrungstatsachen — etwa auf dem Sektor der Physik — zu richtigen Erkenntnissen führt. Zwar hat es den Anschein, daß die Naturprozesse nach mathematischen Spielregeln ablaufen, aber logisch notwendig ist der Zusammenhang zwischen Naturgeschehen und Mathematik nicht. Mathematik ist nur das beschreibende Instrument; jedes Ergebnis der theoretischen Physik muß daher experimentell überprüft werden. In sich vollkommen ist nur die reine Mathematik, die sich auf die Begriffswelt des menschlichen Geistes als Operationsbasis beschränkt.

Wir kommen jetzt zum zweiten Teil unseres Themas, der philosophisch weniger anspruchsvoll ist, dafür aber mehr Einsicht in die Architektur der natürlichen Zahlen bringt. Wir haben schon darauf hingewiesen, daß im Bereich dieser Zahlen keineswegs alle Rechenoperationen uneingeschränkt ausführbar sind. Das gilt insbesondere für die Division. Die natürlichen Zahlen 12 und 5 kann man nicht durcheinander dividieren, so unwahrscheinlich diese Feststellung im ersten Moment auch klingen mag. Erst wenn man den Bereich der natürlichen Zahlen künstlich (d. h. axiomatisch) zum Bereich der rationalen Zahlen erweitert — also eine ganz neue Zahlensorte zusätzlich konstruiert —, werden alle Divisionsaufgaben (mit einer Ausnahme) lösbar.

Dieses problematische Verhalten der natürlichen Zahlen gegenüber der Teilbarkeit hat im Laufe der Entwicklung einen ganz neuen Zweig der Mathematik ins Leben gerufen: die Zahlentheorie. Dabei ist es selbstverständlich nicht bei der Untersuchung von Teilbarkeitseigenschaften geblieben.

Das Reizvolle der Zahlentheorie besteht im Gegensatz zwischen der oft laienhaft einfachen Fragestellung — ich erinnere an die magischen Quadrate — und den schwierigen Überlegungen, die bei den Lösungen erforderlich werden. Die gescheitesten Mathematiker haben hier schon heiße Köpfe bekommen, und viele Probleme sind noch heute ungelöst.

Es gibt Zahlen, die — gemessen an der Teilbarkeit — besonders egoistisch sind: wir nennen sie Primzahlen. Jede natürliche Zahl heißt Primzahl, wenn sie nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist. Die Reihe der Primzahlen beginnt folgendermaßen:

2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 - 17 - 19 - 23 - 29 - 31 - 37 - ...

Wenn wir die Reihe fortsetzten, würde uns auffallen, daß die Primzahlen schnell seltener werden. Eine Übersicht über ihre prozentuale Häufigkeit gibt die folgende Tabelle:

zwischen 1 und 10	gibt	es 40%	Primzahlen,
zwischen 1 und 100	gibt	es 25 %	Primzahlen,
zwischen 1 und 1000	gibt	es17%	Primzahlen,

usw.

Man hat den Eindruck, es könne nicht besonders schwer sein, eine Formel anzugeben, die zu jeder beliebigen Anzahl von natürlichen Zahlen sofort den Prozentsatz der darunter enthaltenen Primzahlen liefert. Zuerst hat vor etwa 150 Jahren Carl Friedrich Gauß diese Formel aufgestellt, wonach gilt:

zwischen 1 und x gibt es rund 100/lnx % Primzahlen.

Bei diesem Ausdruck handelt es sich um eine Näherungsformel, die insbesondere für den Anfang der Zahlenreihe schlechte Ergebnisse liefert. Nach Gauß dürften — wie man leicht nachrechnet — zwischen 1 und 100 nur 22 °/o Primzahlen liegen, während es in Wahrheit doch 25 % sind. Dagegen bewährt sich die Formel umso besser, je länger der in Betracht gezogene Abschnitt der Zahlenreihe ist, und schließlich verschwindet der Unterschied zwischen Formel und Wirklichkeit. Diese sich steigernde Genauigkeit der Gaußschen Formel ist in grober Veranschaulichung der Inhalt des sogenannten Primzahlsatzes. Der Beweis für diesen Satz wurde nicht mehr von Gauß entdeckt; er gehört zu den schwierigsten Beweisen der ganzen Mathematik und erfordert moderne Methoden. Wir haben hier ein Musterbeispiel für den Kontrast zwischen Fragestellung und Beweis in der Zahlentheorie. Verantwortlich für die Schwierigkeit ist die unregelmäßige Aufeinanderfolge der Primzahlen. Man kann nämlich beweisen, daß keine Formel existiert, die den Faunen der Primzahlen gerecht wird und ihre Aufeinanderfolge richtig wiedergibt.

Da die Primzahlen immer seltener werden, könnte man den Verdacht haben, daß sie irgendwo überhaupt aufhören, daß es also nur endlich viele Primzahlen gibt. Daß diese Vermutung falsch ist, hat schon Euklid bewiesen! Euklid überlegte folgendermaßen:

Gäbe es nur endlich viele Primzahlen — etwa p_1 p_2, . . ., p_n —, so müßte das Produkt

$N = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n$

aus allen Primzahlen durch alle diese Primzahlen ohne Rest teilbar sein (Produkte sind immer durch ihre Faktoren teilbar!). Deswegen könnte die um 1 größere Zahl (N + 1) nicht ebenfalls durch die Primzahlen p, bis p„ teilbar sein; vielmehr müßte hier jedesmal der Rest 1 bleiben. Folglich wäre (N + 1) entweder gar nicht teilbar, also selbst eine Primzahl —, oder aber durch andere, noch nicht aufgeschriebene Primzahlen teilbar. Im ersten Fall müßte also mindestens (N + 1), im zweiten Fall die neuen Teiler von (N + 1) als zusätzliche Primzahlen auftreten. Das widerspricht unserer Annahme, daß wir von vornherein alle Primzahlen aufgeschrieben haben, d. h. diese Annahme muß falsch sein: es gibt mehr Primzahlen als man aufschreiben kann, d. h. unendlich viele.

An diesem Beispiel erkennen wir, daß nicht alle zahlentheoretischen Beweise kompliziert sein müssen. Zu den einfacheren Problemen gehört auch der Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit aller Zahlen in Primfaktoren. Z, B. ist

$5\,880 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$,

wobei diese Zerlegung eindeutig, d. h. nur auf eine Weise möglich ist. Wir wollen auf den Beweis verzichten; er ist etwas umständlich, aber nicht schwer.

Der Satz von der eindeutigen Primfaktorenzerlegung bildet die Grundlage der sogenannten „multiplikativen Zahlentheorie“. Man kann ganz analog versuchen, natürliche Zahlen als Summe von Primzahlen darzustellen, etwa nach dem Vorbild:

60 = 29 + 31 oder 100 = 47 + 53.

Zerlegungen dieser Art gehören in den Bereich der „additiven Zahlentheorie“, wo über reine Teilbarkeitsfragen hinausgegangen wird, und die wesentlich schwieriger ist als ihr multiplikativer Partner. Schon die einfache Vermutung von Goldbach, daß jede gerade Zahl als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden könne, ist noch heute unbewiesen, obwohl die Zerlegung für kleinere Zahlen meist leicht zu finden ist.

Aber auch die additive Zahlentheorie besteht nicht nur aus schwierigen Sätzen, wie folgendes Beispiel zeigt: Man kann sehr leicht beweisen, daß jede Primzahl außer 2 als Differenz zweier Quadratzahlen geschrieben werden kann. In mathematischer Formelsprache:

Zu jeder Primzahl $p \neq 2$ existieren zwei Quadratzahlen a^2 und b^2, so daß gilt:

$p = a^2 — b^2$.

Den Beweis erbringen wir, indem wir die Grundzahlen a und b ausrechnen:

Wegen $a^2 — b^2 = (a + b)(a — b)$ ist die Behauptung identisch mit $p = (a + b)(a — b)$.

Da hier die Primzahl p formal als Produkt erscheint, muß der größere Faktor gleich p, der kleinere gleich 1 sein —, die einzige Möglichkeit, wo ein Produkt nicht dem Begriff Primzahl widerspricht. Also folgt:

$a + b = p$ und $a — b = 1$.

Das sind zwei Gleichungen mit den Unbekannten a und b, für die man durch Auflösung erhält:

$a = (p+1)/2$ und $b = (p-1)/2$

Da p stets ungerade ist (die einzige gerade Primzahl wurde ausgeschlossen), sind a und b stets ganze Zahlen und auf Grund der Rechnung gilt ganz von selbst $p = a^2 — b^2$.

Für p = 31 ergibt sich z. B. a = 16 und b = 15, also die Darstellung: $31 = 16^2 — 15^2$ (= 256 — 225 = 31).

Zum Schluß wollen wir noch das berühmteste ungelöste Problem der Zahlentheorie in Erinnerung rufen: Es handelt sich um die Fermatsche Behauptung. Pierre de Fermat war ein scharfsinniger französischer Mathematiker des siebzehnten Jahrhunderts. Er hatte die Angewohnheit, seine Studienbücher mit (für uns sehr wertvollen) Randbemerkungen zu versehen. Eine dieser Notizen bezieht sich auf unser ungelöstes Problem.

Sie kennen den Satz des Pythagoras. Man schreibt ihn gewöhnlich in der Form

$a^2 + b^2 = c^2$.

Es geht jetzt nicht um die geometrische Interpretation dieser Gleichung, sondern um die Frage, ob es ganze Zahlen a, b, c gibt, welche diese Bedingung erfüllen. Solche Zahlentripel existieren tatsächlich, wie folgendes Beispiel zeigt:

$3^2 + 4^2 = 5^2$.

Man kann sogar zeigen, daß es unendlich viele solcher „pytagoräischer Zahlentripel“ gibt.

Uns interessiert jetzt die Frage, ob es auch für andere Exponenten — etwa für die Hochzahlen 3 oder 4 — pythagoräische Tripel gibt, d. h. ob die allgemeinere Gleichung

$a^n + b^n = c^n$

ebenfalls in ganzen Zahlen a, b, c erfüllbar ist, also auch dann, wenn n größer als 2 ist.

Fermat, der mit seinen Behauptungen im allgemeinen sehr vorsichtig war, bemerkt auf einem Buchrand, er habe einen ganz einfachen Beweis dafür gefunden, daß pythagoräische Tripel ausschließlich für den Exponenten 2 vorhanden seien, daß also die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ niemals in ganzen Zahlen a, b, c erfüllbar sei, sobald der Exponent größer als 2 ist. Leider sei der Platz zu knapp für die Erläuterung des einfachen Beweises.

Ganze Generationen haben inzwischen vergeblich nach der Fermatschen Beweisidee gesucht und einige mißtrauische Gemüter zogen Fermats Glaubwürdigkeit in Zweifel. Je mehr sich aber seine übrigen Randbemerkungen als zuverlässige mathematische Fundgruben erwiesen, desto mehr verstummten die Zweifler. Vor dem ersten Weltkrieg wurde von dem Mathematiker Wolfskehl ein Preis von einhunderttausend Mark ausgesetzt —, leider mit dem einzigen Erfolg, daß sich zahllose Dilettanten genau so ergebnislos mit der Sache befaßten wie bisher die Fachmathematiker. Die Scheinlösungen und damit verbundene Streitereien häuften sich, weil die Verfasser so unbelehrbar waren wie die Konstrukteure des perpetu mobile. Schließlich zog Wolfskehl den ausgesetzten Preis wieder zurück. Die Fermatsche Behauptung wartet heute noch auf den klugen Kopf, der die Ehre des Franzosen wieder herstellt und beweist, daß pythagoräische Tripel nur für den Exponenten 2 vorhanden sind. —

Unsere Beispiele mögen jetzt genügen. Sie sollten zeigen, daß die Ordnung der natürlichen Zahlen reizvoll und viel schwieriger ist, als wir auf Grund unserer täglichen Rechenpraxis zuzugeben geneigt sind. Die Zahlentheorie ist eine heimtückige Wissenschaft, wo Einfaches und Schwieriges überraschend dicht beieinander liegen. Nicht weniger problematisch ist die Einbürgerung der natürlichen Zahlen in das Reich der Mathematik, und vom ersten Axiom bis zum fertigen Rechenschema für den ABC-Schützen ist ein weiter Weg. Wir dürfen also eigentlich keinem einen Vorwurf machen, wenn er mit Grillparzers Worten in schöner Offenheit bekennt: „Das Einmaleins ist mir bis auf diese Stunde nicht geläufig.“